
KOMPLEXE FUNKTIONEN

Das Rechnen mit komplexen Funktionen, insbesondere Wegintegrale komplexer Funktionen, ist ein extrem nützliches Werkzeug in der theoretischen Physik.

[H18] *Residuensatz* **[3 + 3 = 6 Punkte]**

(a) Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,(5-3\cos\theta)^{-1}$ mit dem Residuensatz: Parametrisieren Sie dazu den Einheitskreis in der komplexen Ebene, $z(\theta) = \ldots$, und zeigen Sie

$$\frac{2\mathrm{i}}{3}\oint \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5 - 3\cos\theta}\,.$$

Bestimmen Sie die Pole des Integranden, die umlaufenen Residuen, und geben Sie den Wert des Integrals an.

(b) Berechnen Sie für $n \geq 0$ die Integrale $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{in\theta}\,(5-3\cos\theta)^{-1}$ mit dem Residuensatz, indem Sie wie in (a) den Einheitskreis in der komplexen Ebene parametrisieren und damit

$$c_n = \frac{2\mathrm{i}}{3}\oint \frac{\mathrm{d}z\, z^n}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{5 - 3\cos\theta}$$

zeigen. Bestimmen Sie die Pole des Integranden, die umlaufenen Residuen, und zeigen Sie so $c_n = \frac{\pi}{2}\frac{1}{3^n}$. Bestimmen Sie für $n < 0$ die Integrale durch komplexe Konjugation, und leiten damit die folgende Reihendarstellung her:

$$\frac{1}{5-3\cos\theta} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{im\theta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3^m}\cos m\theta\,.$$

[H19] *Konforme Abbildungen* **[2 + 4 = 6 Punkte]**

Abbildungen der xy-Ebene bilden Punkte (x,y) auf $(x',y') = (u(x,y), v(x,y))$ ab und entsprechend Kurven $(x(t),y(t))$ auf Kurven $(u(x(t),y(t)), v(x(t),y(t)))$.

(a) Zeigen Sie, dass bei differenzierbaren Abbildungen und Kurven die Tangentialvektoren durch

$$\begin{pmatrix}\dot{x}' \\ \dot{y}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x} \\ \dot{y}\end{pmatrix}$$

linear zusammenhängen.

(b) Zeigen Sie weiter: Falls $f(z) = u + \mathrm{i}v$ eine komplex differenzierbare Funktion ist, so besagen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass es sich bei dieser linearen Abbildung von Tangentialvektoren um eine Streckung um den Faktor $\sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}$ und eine Drehung um $\tan\theta = \partial_x v/\partial_x u$ handelt (falls $\sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}$ nicht verschwindet). Dies ist also nichts anderes als die Multiplikation des komplexen Tangentialvektors $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}$ mit $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \partial_x u + \mathrm{i}\partial_x v = \partial_y v - \mathrm{i}\partial_y u$. Beachten Sie hierzu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$. (Der Streckungsfaktor und der Drehwinkel hängen normalerweise von (x,y) ab.)

Komplex differenzierbare Funktionen bilden also, wo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ nicht verschwinet, die komplexe Ebene konform ab: Größenverhältnisse von Tangentialvektoren am selben Punkt und Winkel zwischen ihnen bleiben unverändert.

[C2] *Computerübung: Spiegelladung III* **[8 Punkte]**

Betrachten Sie nochmals das Problem einer leitenden Kugelschale und einer Punktladung. Die Kugelschale habe Radius R Gesamtladung Q, die Punktladung q habe den Abstand r vom Mittelpunkt der Kugelschale. Diese Computerübung sollten Sie mit MATHEMATICA lösen, da Sie interaktive Plots erstellen sollen, in denen die Ladungen und Längen variiert werden können.

(a) Begründen Sie, warum Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R = 1$ setzen können, so dass nur r variiert werden muss. Begründen Sie auf die gleiche Weise, warum ohne Beschränkung der Allgemeinheit $q = 1$ gesetzt werden kann, so dass nur Q variiert werden muss. Warum kann der Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung gelegt werden?

(b) Plotten Sie die Äquipotentiallinien in einer beliebigen Ebene die durch Ursprung und Punktladung geht. Überprüfen Sie, dass die Kugelschale selbst mit einer Äquipotentiallinie zusammenfällt.

(c) Plotten Sie die Oberflächenladungsdichte auf der Kugel. Überlegen Sie dazu, wie Sie diese gut visualisieren können. Sollte das allgemeine Problem zu große Schwierigkeiten machen, lösen Sie diese Aufgabe für den Fall $Q = 0$.

(d) Versuchen Sie, auch das elektrische Feld sinnvoll zu visualisieren.

Beachten Sie, dass die Punkladung sowohl außerhalb ($r > 1$) als auch innerhalb ($r < 1$) der Kugelschale sitzen kann. (*Hinweis*: Mit ein wenig Nachdenken genügt es, nur einen der beiden Fälle explizit zu betrachten, der andere Fall wird implizit mit abgedeckt. Warum?) Und denken Sie daran, dass Q positiv, negativ oder gar null sein könnte. Die Lösung der Computerübung sollten Sie dadurch dokumentieren, dass Sie für alle *qualitativ* unterschiedlichen Szenarien beispielhafte Plots ausdrucken.

Auch für diese Computerübung haben Sie wieder mindestens drei Wochen Zeit. Sie können von den zahlreichen Plotfunktionen von MATHEMATICA Gebrauch machen. Zu diesen gibt es im Netz umfangreiche Tutorials, die Ihnen weiterhelfen können. Aber denken Sie daran: Wichtiger als unglaublich aufwändige Plots mit vielen Gimmicks sind aussagefähige Plots, auf denen die physikalisch interessante Information gut zu erkennen ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!